برنامه‌ریزی مقید
روش‌های جریمه‌ای و مانعی

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

روش جریمه‌ای و مانعی

تقریب زدن مسئله بهینه‌سازی مقید با مسائل نامقید

- روش جریمه‌ای
  - افزودن جمله‌ای به تابع هدف
  - جمله موجب ایجاد هزینه زیاد در صورت تخطی از قید
- روش مانعی
  - افزودن جمله‌ای به تابع هدف
  - جمله موجب ارجح دانستن نقاط داخل منطقه شدنی به نقاط نزدیک مرز

هر دو دارای ضریبی c

- تعیین کننده شدت جریمه یا مانع
- با $c \to \infty$
  - دقیق‌تر شدن تقریب
  - وجود توابع خاص دارای جواب دقیق به ازای مقادیر متناهی

روش جریمه‌ای و مانعی

دو مسئلهٔ اساسی مرتبط با این روش‌ها

- اهمیت مناسب بودن تقریب مسئله نامقید از مسئله مقید
  - همگرایی
- چگونگی حل مسئله نامقید تابع هدف شامل جمله جریمه یا مانع

روش جریمه‌ای و مانعی

دارای تابع هدف اصلی

به علاوه مقدار نامنفی اضافی جهت هر قیدی که رعایت نشود

تبدیل به صورت نامقید

جریمه بیشتر با تعدی بیشتر از قید

تحکیم بیشتر قیدها در هر مرحله جهت

- ماندن در منطقه شدنی
- همزمان میل به کمینه

روش جریمه‌ای

تعویض مسئله مقید با تابع جریمه

دارای تابع هدف اصلی

به علاوه مقدار نامنفی اضافی جهت هر قیدی که رعایت نشود

تبدیل به صورت نامقید

جریمه بیشتر با تعدی بیشتر از قید

تحکیم بیشتر قیدها در هر مرحله جهت

- ماندن در منطقه شدنی
- همزمان میل به کمینه

روش جریمه‌ای

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{x} \in \Omega$$

$$\min f(\boldsymbol{x}) + \mu P(\boldsymbol{x})$$

تعویض مسئله مقید با تابع جریمه

دارای تابع هدف اصلی

به علاوه مقدار نامنفی اضافی جهت هر قیدی که رعایت نشود

تبدیل به صورت نامقید

جریمه بیشتر با تعدی بیشتر از قید

تحکیم بیشتر قیدها در هر مرحله جهت

- ماندن در منطقه شدنی
- همزمان میل به کمینه

روش جریمه‌ای

تعویض مسئله مقید با تابع جریمه

دارای تابع هدف اصلی

به علاوه مقدار نامنفی اضافی جهت هر قیدی که رعایت نشود

تبدیل به صورت نامقید

جریمه بیشتر با تعدی بیشتر از قید

تحکیم بیشتر قیدها در هر مرحله جهت

- ماندن در منطقه شدنی
- همزمان میل به کمینه

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{x} \in \Omega$$

$$\min f(\boldsymbol{x}) + \mu P(\boldsymbol{x})$$

- ویژگی‌های P
  - پیوسته
  - P>0 به ازای تمامی $x \in \mathbb{R}^n/\Omega$
  - P=0 اگر و فقط اگر $x \in \Omega$

روش جریمه

مثال- تابع هدف با تعدادی قید نامساوی

$$\Omega = \{x: h_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m\}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\max[0, h_i(x)])^2$$

$\mu P(x)$ μ بزرگ

- نقطه کمینه در زمانی که P کوچک
- ایده‌ال $\mu \to \infty$
- همگرا شدن نقطه پاسخ روش جریمه به مسئله مقید

روش جریمه

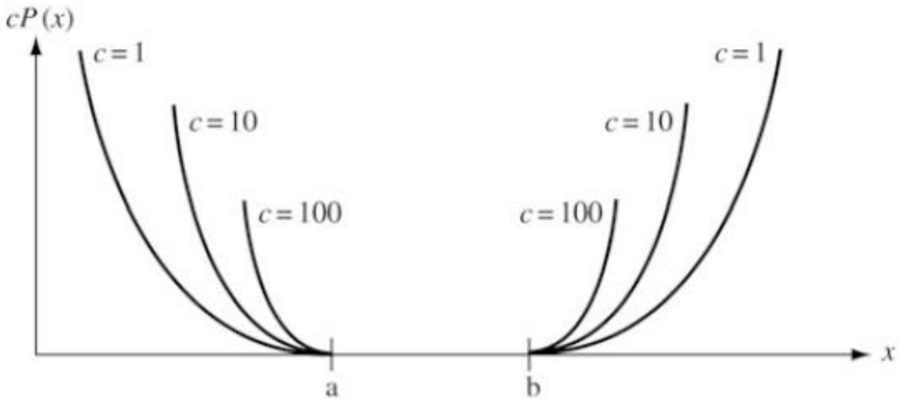
مثال- تابع هدف با تعدادی قید نامساوی

$$\Omega = \{x: h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\max[0, h_i(x)])^2$$

نمایش $\mu P(x)$ برای $h_1(x) = x - b, h_2(x) = a - x$

- μ بزرگ
  - نقطه کمینه در زمانی که P کوچک
- ایده‌ال $\mu \to \infty$
  - همگرا شدن نقطه پاسخ روش جریمه به مسئله مقید



روش جریمه‌ای

روش

$$Q(\boldsymbol{x};\mu) = f(\boldsymbol{x}) + \mu P(\boldsymbol{x})$$
$$\min Q(\boldsymbol{x};\mu)$$

μ پارامتر جریمه

دنباله‌ای از اعمال حل بهینه‌سازی نامقید بر $Q(\boldsymbol{x};\mu)$ روی دنباله‌ای از μ_k

با $k \to \infty$

- $\mu_{k+1} > \mu_k$
- $\mu_k \to \infty$

منجر به افزایش اهمیت نسبی مقدار جریمه در هر تکرار

میل پاسخ به سمت صورت نامقید

تابع جریمه

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$h_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m$$

به صورت

$$h_i^+(x) = \max[0, h_i(x)]\ i = 1, \dots, m$$

دلیل

- اساسا P(x)=0
- مقدار غیرصفر در صورت تخطی از محدودیت‌ها

تابع جریمه

ساده‌ترین

- افزودن تابع جریمه درجه دو

افزودن مربع تخطی از قید به تابع هدف

$$Q(\boldsymbol{x};\mu) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\sum_i (h_i^+(\boldsymbol{x}))^2 = f(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}||h^+(\boldsymbol{x})||^2$$

μ پارامتر جریمه

روش جریمه‌ای

تبدیل تابع مقید

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})$$
$$, g_i(\boldsymbol{x}) = 0$$
$$, h_i(\boldsymbol{x}) \geq 0$$

به

$$Q(\boldsymbol{x};\mu) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\sum_i (g_i(\boldsymbol{x}))^2 + \frac{\mu}{2}\sum_i (\max(\{0, h_i(\boldsymbol{x})\}))^2$$

μ پارامتر جریمه

الگوریتم

μ_k دنباله‌ای از ضرائب از ۱، ۲، …

- در هر مرحله $\mu_k > 0$ و $\mu_{k+1} > \mu_k$
- میل ضریب به بی‌نهایت

تعریف تابع $Q(\boldsymbol{x};\mu) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\sum_i (g_i(\boldsymbol{x}))^2$

برای هر k

- حل $\min Q(\boldsymbol{x};\mu_k)$

ادامه تا یافتن پاسخ

$\min x$

$x \geq 5$

$Q(\boldsymbol{x};\mu) = x + \frac{\mu}{2} max(0, 5 - x)^2 \Longrightarrow \nabla Q = 1 + \mu(5 - x) = 0 \Longrightarrow x = 5 - \frac{1}{\mu}$

مثال

$$\min \frac{1}{3}(x+1)^3 + y,$$

با توجه

$$1 - x \leq 0$$

$$-y \leq 0$$

مثال

$$\min \frac{1}{3}(x+1)^3 + y,$$

با توجه

$$1 - x \leq 0$$

$$-y \leq 0$$

$$Q(x,y;\mu) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + y + \mu[(\max 0, 1-x)^2 + (\max 0, -y)^2$$

مثال

$$\min \frac{1}{3}(x+1)^3 + y,$$

با توجه

$$1 - x \le 0$$

$$-y \le 0$$

$$Q(x, y; \mu) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + y + \mu[(\max 0, 1-x)^2 + (\max 0, -y)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = (x+1)^2 - 2\mu \max(0, 1-x) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 1 - 2\mu \max(0, -y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min[(x+1)^2, (x+1)^2 - 2\mu\ (1-x)] = 0 \\ \min[1, 1 + 2\mu\, y\quad] = 0 \end{cases}$$

مثال

$\min \frac{1}{3}(x+1)^3 + y,$

با توجه

$1 - x \leq 0$

$-y \leq 0$

$Q(x, y; \mu) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + y + \mu[(\max 0, 1-x)^2 + (\max 0, -y)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = (x+1)^2 - 2\mu \max(0, 1-x) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 - 2\mu \max(0, -y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min[(x+1)^2, (x+1)^2 - 2\mu\ (1-x)] = 0 \\ \min[1, 1 + 2\mu y\ ] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x} = -1 \text{غقق} \\ \mathrm{x} = -1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 4\mu} \\ y = -\frac{1}{2\mu} \end{cases}$$

مثال

$$\min \frac{1}{3}(x+1)^3 + y,$$

با توجه

$$1 - x \le 0$$

$$-y \le 0$$

$$Q(x,y;\mu) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + y + \mu[(\max 0, 1-x)^2 + (\max 0, -y)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = (x+1)^2 - 2\mu \max(0, 1-x) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 - 2\mu \max(0, -y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min[(x+1)^2, (x+1)^2 - 2\mu\ (1-x)] = 0 \\ \min[1, 1 + 2\mu\, y\ ] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1_{\text{غقق}} \\ x = -1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 4\mu} \\ y = -\frac{1}{2\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1_{\text{غقق}} \\ x = -1 - \mu + \sqrt{\mu^2 (1 + \frac{4}{\mu})} \\ y = -\frac{1}{2\mu} \end{cases}$$

مثال

$\min \frac{1}{3}(x+1)^3+y,$

با توجه

$1-x \leq 0$

$-y \leq 0$

$Q(x,y;\mu)=\frac{1}{3}(x+1)^3+y+\mu[(\max 0,1-x)^2+(\max 0,-y)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}=(x+1)^2-2\mu\max(0,1-x)=0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}=1-2\mu\max(0,-y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min[(x+1)^2,(x+1)^2-2\mu\ (1-x)]=0 \\ \min[1,1+2\mu\, y\quad]=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}=-1_{\text{غقق}} \\ \mathrm{x}=-1-\mu+\sqrt{\mu^2+4\mu} \\ y=-\frac{1}{2\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}=-1_{\text{غقق}} \\ \mathrm{x}=-1-\mu+\sqrt{\mu^2(1+\frac{4}{\mu})} \\ y=-\frac{1}{2\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}=-1_{\text{غقق}} \\ \mathrm{x}=\lim_{\mu\to\infty}\left(-1-\mu+\sqrt{\mu^2(1+\frac{4}{\mu})}\right)\quad=1 \\ \mathrm{y}=\lim_{\mu\to\infty}\left(-\frac{1}{2\mu}\right)\quad=0 \end{cases}$$

مثال

$$\min 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y,$$

با توجه

$$x = 0$$

مثال

$$\min 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y,$$

با توجه

$$x = 0$$

$$Q(x, y; \mu) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \frac{\mu}{2}x^2$$

مثال

$$\min 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y,$$

با توجه

$$x = 0$$

$$Q(x, y; \mu) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \frac{\mu}{2}x^2 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4x + 2y + \mu x = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

مثال

$$\min 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y,$$

با توجه

$$x = 0$$

$$Q(x, y; \mu) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \frac{\mu}{2}x^2 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4x + 2y + \mu x = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y = 1 - x$$

مثال

$\min 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y,$

با توجه

$x = 0$

$$Q(x, y; \mu) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \frac{\mu}{2}x^2 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4x + 2y + \mu x = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow y = 1 - x$

$4x + 2y + \mu x = 0 \Longrightarrow 4x + 2 - 2x + \mu x = 0$

مثال

$$\min 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y,$$

با توجه

$$x = 0$$

$$Q(x, y; \mu) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \frac{\mu}{2}x^2 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x + 2y + \mu x = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y = 1 - x$$

$$4x + 2y + \mu x = 0 \Longrightarrow 4x + 2 - 2x + \mu x = 0 \Longrightarrow x = -\frac{2}{2+\mu}$$

مثال

$$\min 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y,$$

با توجه

$$x = 0$$

$$Q(x, y; \mu) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \frac{\mu}{2}x^2 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4x + 2y + \mu x = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y = 1 - x$$

$$4x + 2y + \mu x = 0 \Longrightarrow 4x + 2 - 2x + \mu x = 0 \Longrightarrow x = -\frac{2}{2+\mu}$$

$$\lim_{\mu \to \infty} x = 0$$

مثال

$$\min 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y,$$

با توجه

$$x = 0$$

$$Q(x, y; \mu) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \frac{\mu}{2}x^2 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4x + 2y + \mu x = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y = 1 - x$$

$$4x + 2y + \mu x = 0 \Longrightarrow 4x + 2 - 2x + \mu x = 0 \Longrightarrow x = -\frac{2}{2+\mu}$$

$$\lim_{\mu \to \infty} x = 0, y = 1$$

الگوریتم

تابع روش-جریمه(f و P و x و $k_{\text{بیش}}$ و $\mu = ۱$ و $\gamma = ۲$)

- برای k از ۱ تا $k_{\text{بیش}}$
  - $\boldsymbol{x} = \text{کمینه‌ساز}\big(f(\boldsymbol{x}) + \mu P(\boldsymbol{x})\big)$
  - $\mu *= \gamma$
  - اگر $P(x) == 0$
    - خروجی $\boldsymbol{x}$
  - انتها
  - خروجی $\boldsymbol{x}$
- انتها

روش جریمه‌ای

انتخاب مناسب پارامتر جریمه منجر به کاهش تعدادهای تکرار

امکان انتخاب مناسب پارامتر

محدودیت‌های روش جریمه‌ای

محدودیت‌ها در عمل

مشکل‌تر شدن کم کردن $Q(\boldsymbol{x};\mu)$ با بزرگتر شدن μ_k

- بدوضعیت شدن تابع هسی $\nabla^2_{xx}Q(\boldsymbol{x};\mu)$ در نزدیکی کمینه‌ساز
- تاثیر بر روش محاسبات شبه-نیوتن
- کاهش صحت مراحل حساب شده با روش نیوتن
  - تاثیر بر محاسبات ممیز شناور (حل‌پذیر)

تقریب تیلور مناسب حول همسایه کوچکی از $Q(\boldsymbol{x};\mu)$

- منجر به قدم‌های کوچک
- همگرایی کند

روش لاگرانژی افزوده

ایراد روش جریمه‌ای

- برآورده نشدن کامل قیدهای $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$
  - در عوض
    - قیدها وابسته به پارامتر جریمه نهائی μ^*
    - برآورده کننده تقریبی $g_i(x) = \mu^* \lambda_i^*$
    - تضمین میل این مقدار به صفر
  - امکان نیاز به مراحل زیاد جهت خلاصی از پارامتر جریمه

ایده روش لاگرانژی افزوده

- برآورده کردن سریعتر قید تساوی
- با افزودن متغیر λ_i در تابع هدف

$$\mathcal{L}_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}; \mu) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_i \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2} \sum_i (g_i(\boldsymbol{x}))^2$$

روش لاگرانژی افزوده

$$\mathcal{L}_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}; \mu) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_i \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\sum_i (g_i(\boldsymbol{x}))^2$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda} - \mu \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

روش لاگرانژی افزوده

مشابه روش جریمه‌ای

روش ضرایب

افزودن مربع تخطی از قید به تابع هدف

تابع مقید

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}), h_i(\boldsymbol{x}) \geq 0$$

تبدیل قید نامساوی به تساوی

$$h_i(\boldsymbol{x}) - s_i = 0, s_i \geq 0$$

s_i متغیر کم

افزودن متغیرهای بیشتر جهت حل مسئله

محدود کردن قیدها

- ساده‌تر شدن جهت حل

روش‌های لاگرانژی افزوده

$$\nabla_x \mathcal{L}_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}; \mu) = \nabla f(\boldsymbol{x}) - \sum_i [\lambda_i - \mu g_i(\boldsymbol{x})] \nabla g_i(\boldsymbol{x})$$

مطابق ک‌ک‌ت

- کمینه در $\nabla_x \mathcal{L} = 0$

مقایسه $\nabla_x \mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$ با $\nabla_x \mathcal{L}_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}; \mu)$

$$\lambda_i^* = \lambda_i^k - \mu_k g_i(\boldsymbol{x}_k)$$

پیشنهاد حل مسئله با زیرمسئله بهینه‌سازی نامقید با μ و $\boldsymbol{\lambda}$ ثابت

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}; \mu)$$

روش‌های لاگرانژی افزوده

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda};\mu)$$

معادله بروز کردن

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \mu_k g_i(\boldsymbol{x}_k)$$

همگرائی بدون نیاز به کاهش μ به مقدار خیلی کوچک

گرفتاری کمتر در دست و پنجه نرم کردن با هسی بدوضعیت

الگوریتم

تابع روش-لاگرانژ-افزوده(f و h و $\boldsymbol{x}$ و بیشk و $\mu = ۱$ و $\gamma = ۲$)

- $\lambda =$ صفر(طول$(h(\boldsymbol{x}))$)
- برای k از ۱ تا بیشk
  - $P(\boldsymbol{x}) = -\lambda \sum h(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{۲} \sum h(\boldsymbol{x})^۲$
  - $\boldsymbol{x} =$ کمینه‌ساز$(f(\boldsymbol{x}) + P(\boldsymbol{x}))$
  - $\mu \mathrel{*}= \gamma$
  - $\lambda \mathrel{-}= \mu h(\boldsymbol{x})$
- انتها
- خروجی $\boldsymbol{x}$

انتها

روش مانعی

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{x} \in \Omega$$

Ω دارای درونی که امکان رسیدن به هر نقطه مرزی با حرکت از نقطه درونی

- مجموعه مقاوم
- معمولا حاصل قیدهای نامساوی

$$\Omega = \{x : h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

- همچنین معروف به روش‌های درونی
- جلوگیری از خروج از منطقه

روش مانعی

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{x} \in \Omega$$
$$\Omega = \{x: h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

تابع مانع B

- تعریف شده درون Ω
- ویژگی‌ها
  - پیوسته
  - $B(x) \geq 0$
  - $B(x) \rightarrow \infty$ با نزدیک شدن x به مرزها

نمونهٔ تابع مانع

با داشتن مجموعه مقاوم

$$\Omega = \{x: h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

با فرض درون مجموعه xهایی که $h_i(x) < 0$

$$B(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{h_i(x)}$$

نمونهٔ تابع مانع

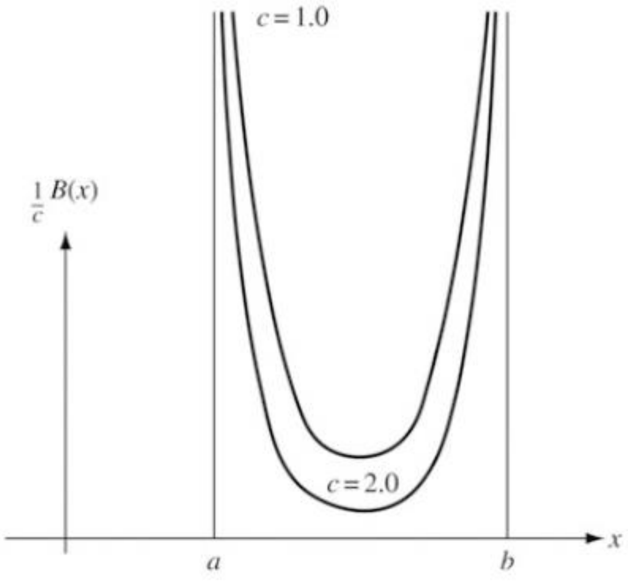
با داشتن مجموعه مقاوم

$\Omega = \{x: h_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m\}$

با فرض درون مجموعه xهایی که $h_i(x) < 0$

$$B(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{h_i(x)}$$

نمایش $B(\boldsymbol{x})$ برای $h_1(x) = x - b, h_2(x) = a - x$



نمونه تابع مانع ۲

تابع لگاریتم

$$B(x) = -\sum_{i=1}^{m} ln(h_i(x))$$

مورد استفاده در برنامه‌ریزی خطی نقطه درونی

تبدیل به تابع مانع

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{x} \in \Omega$$

$$\min f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{c} B(\boldsymbol{x})$$
درون $\boldsymbol{x} \in \Omega$

$$\min f(\boldsymbol{x}) + \mu B(\boldsymbol{x})$$
درون $\boldsymbol{x} \in \Omega$

- c ثابتی مثبت
  - با پیشبرد تکرارها اجازه نزدیک شدن به مرزها
- یا
- $c \to \infty$ برابر با $\mu \to 0$
- امکان استفاده از روش‌های معمول بهینه‌سازی نامقید
- جستجو در درون فضای شدنی

الگوریتم

تابع روش-لنقطه-درونی(f و h و $\boldsymbol{x}$ و بیشk و $\mu = ۱$ و $\gamma = ۲$)

- برای k از ۱ تا بیشk
  - $B(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{m} ln(h_i(x))$
  - $\boldsymbol{x} = \text{کمینه‌ساز}\left(f(\boldsymbol{x}) + \frac{۱}{\mu} B(\boldsymbol{x})\right)$
  - $\mu *= \gamma$
- انتها
- خروجی $\boldsymbol{x}$

انتها

منابع

[لوئن‌برگر]

“Constrained Optimization: Sequential Quadratic Programming, Interior Point And Generalized Reduced Gradient Methods,”

B. W. Bader, “Constrained and unconstrained optimization,” 2009